I–1. Feladat

Határozd meg az összes olyan A valós számot, melyre teljesül, hogy minden olyan nem-nulla valós számokból álló $x_1, x_2, \dots$ sorozat, melyre minden $n \geqslant 1$ esetén teljesül, hogy

$$x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n},$$

az csak véges sok negatív tagot tartalmaz.

I–2. Feladat

Legyenek m és n pozitív egészek. Egy $m \times n$-es tábla néhány mezője pirosra van színezve. Az $a_1, a_2, \dots, a_{2r}$ $(2r \geqslant 4)$ páronként különböző piros mezőket tartalmazó sorozatot *futókör*nek nevezzük, ha minden $k \in \{1, \dots, 2r\}$ esetén a_k és a_{k+1} egy átlóra esik, de a_k és a_{k+2} nem esik egy átlóra (ahol $a_{2r+1} = a_1$ és $a_{2r+2} = a_2$).

Határozd meg m és n függvényében, hogy egy futókör nélküli $m \times n$-es tábla legfeljebb hány piros mezőt tartalmazhat.

(*Megjegyzés:* Két mező egy átlóra esik, ha a középpontjukon átmenő egyenes a tábla oldalait $45°$-os szögben metszi.)

I–3. Feladat

Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, és D a BC szakasz egy belső pontja. Legyenek az E és F pontok az A-t tartalmazó, BC egyenes által határolt félsíkban úgy, hogy DE és BE merőleges, továbbá DE érinti az ACD háromszög köréírt körét, illetve DF és CF merőleges, továbbá DF érinti az ABD háromszög köréírt körét. Bizonyítsd be, hogy az A, D, E és F pontok egy körre illeszkednek.

I–4. Feladat

Legyen $n \geqslant 3$ egy egész szám. Zagi, a mókus egy szabályos n-szög egyik csúcsában ül. Zagi egy $n - 1$ ugrásból álló kirándulást tervez az n-szög csúcsain úgy, hogy az i. ugrásban óramutató járásával megegyező irányban i oldalnyival ugrik arrébb minden $i \in \{1, ..., n-1\}$ esetén. Bizonyítsd be, hogy ha $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ ugrás után Zagi már $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ különböző csúcsban járt, akkor $n - 1$ ugrás után Zagi az összes csúcsot meglátogatta.

(*Megjegyzés:* Egy x valós szám esetén $\lceil x \rceil$ a legkisebb egész számot jelöli, amely nem kisebb, mint x.)

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.