Zadatak I–1

Odrediti sve realne brojeve A takve da svaki niz realnih brojeva $x_1, x_2, \ldots$, različitih od nule, koji zadovoljava jednakost

$$x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n}$$

za svaki cijeli broj $n \geqslant 1$, ima samo konačno mnogo negativnih članova.

Zadatak I–2

Dati su prirodni brojevi m i n. Neki kvadratići table (ploče) $m \times n$ su obojeni crvenom bojom. *Lovčev ciklus* je niz međusobno različitih crvenih kvadratića $a_1, a_2, \ldots, a_{2r}$ (gdje je $2r \geqslant 4$), takvih da za sve $k \in \{1, \ldots, 2r\}$ vrijedi da kvadratići a_k i a_{k+1} su na istoj dijagonali, ali kvadratići a_k i a_{k+2} nisu na istoj dijagonali (pri čemu smatramo da je $a_{2r+1} = a_1$ i $a_{2r+2} = a_2$). Koliko najviše kvadratića (u zavisnosti od m i n) možemo obojiti crveno tako da ne postoji nijedan lovčev ciklus na $m \times n$ tabli?

(*Napomena*: Dva kvadratića su na istoj dijagonali ako prava koja prolazi kroz njihove centre siječe ivice table pod uglom od $45°$.)

Zadatak I–3

Neka je ABC oštrougli trougao i neka je D unutrašnja tačka duži $\overline{BC}$. Tačke E i F leže u poluravni određenoj pravom BC koja sadrži tačku A tako da je DE okomita na BE i DE je tangenta na opisanu kružnicu oko trougla ACD, dok je DF okomita na CF i DF je tangenta na opisanu kružnicu oko trougla ABD. Dokažite da tačke A, D, E i F leže na istoj kružnici.

Zadatak I–4

Neka je $n \geqslant 3$ prirodan broj. Vjeverica Zagi sjedi u vrhu pravilnog n-tougla. Zagi planira putovanje koje se sastoji od $n-1$ skokova takvo da u i-tom skoku preskoči i stranica u smjeru kretanja kazaljke na satu, za $i \in \{1, ..., n-1\}$. Dokazati da ako je nakon $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ skokova Zagi posjetio $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ različitih vrhova, onda će nakon $n-1$ skokova Zagi posjetiti sve vrhove.

(*Napomena.* Za realan broj x sa $\lceil x \rceil$ označavamo najmanji cijeli broj koji je veći ili jednak x.)

Vrijeme za rad: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Redoslijed zadataka ne zavisi od njihove težine.