Příklad I–1

Najděte všechna reálná čísla A taková, že každá posloupnost nenulových reálných čísel $x_1, x_2, \ldots$ splňující

$$x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n}$$

pro každé celé číslo $n \geq 1$ má pouze konečně mnoho záporných členů.

Příklad I–2

Nechť m a n jsou kladná celá čísla. Několik čtvercových políček tabulky $m \times n$ je obarveno červeně. Posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_{2r}$ obsahující $2r \geq 4$ různých červených políček nazveme *cyklus šachového střelce*, pokud pro každé $k \in \{1, \ldots, 2r\}$ leží a_k a a_{k+1} na diagonále dané tabulky, zatímco a_k a a_{k+2} na diagonále neleží (přitom $a_{2r+1} = a_1$ a $a_{2r+2} = a_2$). V závislosti na m a n najděte největší možný počet červených políček tabulky $m \times n$, která neobsahuje žádný cyklus šachového střelce.

Poznámka. Dvě čtvercová políčka leží na diagonále, pokud spojnice jejich středů svírá úhel $45°$ s hranami tabulky.

Příklad I–3

Uvnitř strany BC ostroúhlého trojúhelníka ABC je dán bod D. V polorovině určené přímkou BC obsahující bod A zvolíme body E a F tak, že přímka DE je kolmá na BE a zároveň se dotýká kružnice opsané trojúhelníku ACD, a obdobně je také přímka DF kolmá na CF a zároveň se dotýká kružnice opsané trojúhelníku ABD. Dokažte, že body A, D, E, F leží na jedné kružnici.

Příklad I–4

Nechť $n \geqslant 3$ je celé číslo. Veverka Verča sedí ve vrcholu pravidelného n-úhelníku. Chystá se na procházku o $n-1$ skocích takových, že při i-tém z nich skočí o i hran po směru hodinových ručiček pro $i \in \{1, ..., n-1\}$. Dokažte, že pokud Verča po $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ skocích navštíví $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ různých vrcholů, tak potom po $n-1$ skocích navštíví všechny vrcholy.

Poznámka. Pro reálné číslo x značíme symbolem $\lceil x \rceil$ nejmenší celé číslo větší nebo rovné x.

Čas na vypracování: 5 hodin
Čas na dotazy: 60 minut
Každá úloha je hodnocena nejvýše 8 body.
Úlohy nejsou řazeny dle obtížnosti.