

Aufgabe I-1

Man bestimme alle reellen Zahlen A , sodass jede Folge von Zahlen x_1, x_2, \dots , die alle ungleich Null sind und

$$x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n}$$

für alle $n \geq 1$ erfüllen, nur endlich viele negative Elemente enthält.

Aufgabe I-2

Seien m und n positive ganze Zahlen. Einige Quadrate eines $m \times n$ -Spielbretts sind rot eingefärbt. Eine Folge a_1, a_2, \dots, a_{2r} von $2r \geq 4$ paarweise verschiedenen roten Quadraten nennt man einen *Läufer-Zyklus*, wenn für jedes $k \in \{1, \dots, 2r\}$ die Quadrate a_k und a_{k+1} auf einer Diagonalen liegen, die Quadrate a_k und a_{k+2} aber nicht auf einer Diagonale liegen (hierbei ist $a_{2r+1} = a_1$ und $a_{2r+2} = a_2$). Man bestimme, in Abhängigkeit von m und n , die maximal mögliche Anzahl roter Quadrate auf einem $m \times n$ -Spielbrett, das keinen Läufer-Zyklus enthält.

(Anmerkung: Zwei Quadrate liegen genau dann auf einer Diagonale, wenn die Gerade durch ihre Mittelpunkte die Seiten des Spielbretts in einem Winkel von 45° schneidet.)

Aufgabe I-3

Seien ABC ein spitzwinkliges Dreieck und D ein Punkt im Inneren der Strecke BC . Die Punkte E und F liegen derart in der von der Geraden BC bestimmten Halbebene, die A enthält, dass DE senkrecht auf BE steht und DE eine Tangente an den Umkreis von ACD ist, während DF senkrecht auf CF steht und DF eine Tangente an den Umkreis von ABD ist.

Man zeige, dass die Punkte A, D, E und F auf einem Kreis liegen.

Aufgabe I-4

Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Zagi, das Eichhörnchen, sitzt auf einem Eckpunkt eines regelmäßigen n -Ecks. Zagi plant, eine Reise von $n-1$ Sprüngen zu unternehmen, sodass es für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ im i -ten Sprung um i Kanten im Uhrzeigersinn weiterspringt. Man zeige: Wenn Zagi nach $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ Sprüngen $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ verschiedene Ecken besucht hat, dann wird Zagi nach $n-1$ Sprüngen alle Ecken besucht haben.

(Anmerkung: Für jede reelle Zahl x bezeichnen wir mit $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl größer oder gleich x .)