Zadatak I–1

Odredi sve realne brojeve A takve da svaki niz $x_1, x_2, \ldots$ realnih brojeva različitih od nule koji zadovoljava

$$x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n}$$

za svaki prirodni broj n, ima konačno mnogo negativnih članova.

Zadatak I–2

Neka su m i n prirodni brojevi. Neki od kvadratića $m \times n$ ploče su obojani crveno. Za niz međusobno različitih crvenih kvadratića $a_1, a_2, \ldots, a_{2r}$, gdje je $2r \geqslant 4$, kažemo da je *lovčev ciklus* ako za svaki $k \in \{1, \ldots, 2r\}$ vrijedi da kvadratići a_k i a_{k+1} leže na dijagonali, ali kvadratići a_k i a_{k+2} ne leže na dijagonali (smatramo da je $a_{2r+1} = a_1$ i $a_{2r+2} = a_2$).

U ovisnosti o m i n, odredi najveći mogući broj crvenih kvadratića na $m \times n$ ploči bez lovčeva ciklusa.

(*Napomena.* Dva kvadratića leže na dijagonali ako pravac koji prolazi kroz njihova središta zatvara kut od $45°$ sa stranicama ploče.)

Zadatak I–3

Neka je ABC šiljastokutan trokut i točka D u unutrašnjosti dužine $\overline{BC}$. Točke E i F leže u poluravnini određenoj pravcem BC koja sadrži A tako da je pravac DE okomit na pravac BE i da je DE tangenta na kružnicu opisanu trokutu ACD, dok je pravac DF okomit na pravac CF i DF je tangenta na kružnicu opisanu trokutu ABD. Dokaži da točke A, D, E i F leže na jednoj kružnici.

Zadatak I–4

Neka je $n \geqslant 3$ prirodni broj. Vjeverica Zagi sjedi u vrhu pravilnog n-terokuta. Zagi planira putovanje od $n-1$ skokova tako da u i-tom skoku skoči preko i bridova u smjeru kazaljke na satu, za $i \in \{1, ..., n-1\}$. Dokaži da ako nakon $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ skokova Zagi posjeti $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ različitih vrhova, onda će nakon $n-1$ skokova Zagi posjetiti sve vrhove.

(*Napomena.* Za realni broj x, označimo s $\lceil x \rceil$ najmanji cijeli broj veći ili jednak x.)

Vrijeme rješavanja: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Poredak zadataka ne ovisi o njihovoj težini.