Zadanie I–1

Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste A, dla których każdy ciąg niezerowych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots$ spełniający
$$x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n}$$
dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ posiada jedynie skończenie wiele wyrazów ujemnych.

Zadanie I–2

Niech m i n będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Pewne pola szachownicy $m \times n$ zostały pokolorowane na czerwono. Ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_{2r}$ składający się z $2r \geqslant 4$ parami różnych czerwonych pól nazwiemy *cyklem gończym* jeżeli dla każdego $k \in \{1, \ldots, 2r\}$ pola a_k oraz a_{k+1} leżą na pewnej przekątnej, a pola a_k oraz a_{k+2} nie leżą na przekątnej. (przyjmujemy $a_{2r+1} = a_1$ i $a_{2r+2} = a_2$).

W zależności od m i n, wyznaczyć największą możliwą liczbę czerwonych pól znajdujących się na szachownicy $m \times n$ bez cyklu gończego.

Uwaga. Dwa pola leżą na przekątnej jeżeli prosta przechodząca przez ich środki przecina boki szachownicy pod kątem $45°$.

Zadanie I–3

Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, a D – punktem wewnątrz odcinka BC. Punkty E i F leżą po tej samej stronie prostej BC co punkt A w taki sposób, że prosta DE jest prostopadła do prostej BE i styczna do okręgu opisanego na trójkącie ACD, a prosta DF jest prostopadła do prostej CF i styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABD. Udowodnić, że punkty A, D, E, F leżą na jednym okręgu.

Zadanie I–4

Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą. Wiewiórka Grażyna siedzi w wierzchołku n-kąta foremnego. Grażyna planuje podróż złożoną z $n-1$ skoków, takich że dla $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, w i-tym kroku Grażyna przeskakuje przez i boków wielokąta zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Udowodnić, że jeśli po $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ skokach Grażyna odwiedziła $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ różnych wierzchołków, to po $n-1$ skokach Grażyna odwiedzi wszystkie wierzchołki.

Uwaga. Dla x będącego liczbą rzeczywistą, $\lceil x \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od x.

Czas: 5 godzin
Czas na zadawanie pytań: 60 minut
Za każde zadanie można otrzymać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.