Úloha I–1

Nájdite všetky reálne čísla A také, že každá postupnosť nenulových reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots$ spĺňajúca

$$x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n}$$

pre každé celé číslo $n \geqslant 1$ obsahuje iba konečne veľa záporných členov.

Úloha I–2

Dané sú kladné celé čísla m a n. Niektoré štvorčeky tabuľky $m \times n$ sú zafarbené načerveno. Postupnosť $2r \geqslant 4$ po dvoch rôznych červených štvorčekov $a_1, a_2, \ldots, a_{2r}$ nazývame *strelecký cyklus*, ak pre každé $k \in \{1, \ldots, 2r\}$ ležia štvorčeky a_k a a_{k+1} na diagonále, ale štvorčeky a_k a a_{k+2} neležia na diagonále (pritom $a_{2r+1} = a_1$ a $a_{2r+2} = a_2$). V závislosti od m a n určte najväčší možný počet červených štvorčekov v tabuľke $m \times n$, v ktorej sa nenachádza strelecký cyklus.

(*Poznámka.* Dva štvorčeky ležia na diagonále, ak priamka prechádzajúca ich stredmi zviera so stranami tabuľky uhol $45°$.)

Úloha I–3

Vo vnútri strany BC ostrouhlého trojuholníka ABC je daný bod D. Body E a F ležia v polrovine určenej priamkou BC obsahujúcej bod A tak, že priamka DE je kolmá na priamku BE a priamka DE sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku ACD, zatiaľ čo priamka DF je kolmá na priamku CF a priamka DF sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku ABD. Dokážte, že body A, D, E a F ležia na jednej kružnici.

Úloha I–4

Je dané celé číslo $n \geqslant 3$. Veverička Zagi sedí vo vrchole pravidelného n-uholníka. Zagi plánuje výlet pozostávajúci z $n - 1$ skokov takých, že v i-tom skoku skočí o i hrán v smere hodinových ručičiek, kde $i \in \{1, ..., n - 1\}$. Dokážte, že ak Zagi po $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ skokoch navštívil $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ rôznych vrcholov, tak po $n - 1$ skokoch navštívi všetky vrcholy.

(*Poznámka.* Pre reálne číslo x označuje symbol $\lceil x \rceil$ najmenšie celé číslo, ktoré je väčšie alebo rovné x.)

Čas na riešenie: 5 hodín
Čas na otázky: 60 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 8 bodov.
Poradie úloh nezávisí od ich obtiažnosti.