Naloga I–1

Poišči vsa taka realna števila A, da ima vsako zaporedje neničelnih realnih števil $x_1, x_2, \ldots$, za katerega velja

$$x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n}$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$, končno število negativnih členov.

Naloga I–2

Naj bosta m in n naravni števili. Nekateri kvadrati pravokotne igralne plošče dimenzij $m \times n$ so pobarvani rdeče. Zaporedje $2r \geqslant 4$ različnih rdečih kvadratov $a_1, a_2, \ldots, a_{2r}$ je *lovčev krog*, če za vsak $k \in \{1, \ldots, 2r\}$ kvadrata a_k in a_{k+1} ležita na isti diagonali in hkrati kvadrata a_k in a_{k+2} ne ležita na isti diagonali (kjer je $a_{2r+1} = a_1$ in $a_{2r+2} = a_2$).

Največ koliko polj na $m \times n$ igralni plošči je lahko pobarvanih rdeče, da na plošči ni nobenega lovčevega kroga?

(*Opomba:* Dva kvadrata ležita na isti diagonali, če premica, ki poteka skozi njuni središči, seka rob plošče pod kotom 45°.)

Naloga I–3

Naj bo ABC ostrokotni trikotnik in D točka na daljici BC. Točke A, E in F ležijo na istem bregu premice BC tako, da je DE pravokotna na BE in je DE tangenta na trikotniku ACD očrtano krožnico, hkrati pa je DF pravokotna na CF in je DF tangenta na trikotniku ABD očrtano krožnico. Dokaži, da A, D, E in F ležijo na isti krožnici.

Naloga I–4

Naj bo $n \geqslant 3$ naravno število. Koza Luka sedi na enem izmed oglišč pravilnega n-kotnika. Luka načrtuje potovanje dolgo $n-1$ skokov, pri čemer pri skoku i skoči za i oglišč v smeri urinega kazalca za vsak $i \in \{1, ..., n-1\}$. Dokaži, da če je po $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ skokih Luka obiskal $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ različnih oglišč, potem bo po $n-1$ skokih obiskal vsa oglišča.

(*Opomba:* Za realno število x označimo z $\lceil x \rceil$ najmanjše celo število večje ali enako x.)

Čas: 5 ur
Čas za vprašanja: 60 min
Vsaka naloga je vredna 8 točk.
Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.