Задатак I–1

Одредити све реалне бројеве A такве да сваки низ реалних бројева $x_1, x_2, \ldots$, различитих од нуле, који задовољава једнакост

$$x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n}$$

за сваки цијели број $n \geqslant 1$, има само коначно много негативних чланова.

Задатак I–2

Дати су природни бројеви m и n. Неки квадратићи табле (плоче) $m \times n$ су обојени црвеном бојом. *Ловчев циклус* је низ међусобно различитих црвених квадратића $a_1, a_2, \ldots, a_{2r}$ (гдје је $2r \geqslant 4$), таквих да за све $k \in \{1, \ldots, 2r\}$ вриједи да квадратићи a_k и a_{k+1} су на истој дијагонали, али квадратићи a_k и a_{k+2} нису на истој дијагонали (при чему сматрамо да је $a_{2r+1} = a_1$ и $a_{2r+2} = a_2$). Колико највише квадратића (у зависности од m и n) можемо обојити црвено тако да не постоји ниједан ловчев циклус на $m \times n$ табли?

(*Напомена*: Два квадратића су на истој дијагонали ако права која пролази кроз њихове центре сијече ивице табле под углом од $45°$.)

Задатак I–3

Нека је ABC оштроугли троугао и нека је D унутрашња тачка дужи $\overline{BC}$. Тачке E и F леже у полуравни одређеној правом BC која садржи тачку A тако да је DE окомита на BE и DE је тангента на описану кружницу око троугла ACD, док је DF окомита на CF и DF је тангента на описану кружницу око троугла ABD. Докажите да тачке A, D, E и F леже на истој кружници.

Задатак I–4

Нека је $n \geqslant 3$ природан број. Вјеверица Заги сједи у тјемену правилног n-тоугла. Заги планира путовање које се састоји од $n-1$ скокова такво да у i-том скоку прескочи i ивица у смјеру кретања казаљке на сату, за $i \in \{1, ..., n-1\}$. Доказати да ако је након $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ скокова Заги посјетио $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ различитих тјемена, онда ће након $n-1$ скокова Заги посјетити сва тјемена.

(*Напомена.* За реалан број x са $\lceil x \rceil$ означавамо најмањи цијели број који је већи или једнак x.)

Вријеме за рад: 5 сати
Вријеме за питања: 60 мин
Сваки задатак вриједи 8 бодова.
Редослијед задатака не зависи од њихове тежине.