Zadatak T–1

Odrediti sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da nejednakost

$$f(x^2) - f(y^2) \leqslant (f(x) + y)(x - f(y))$$

vrijedi za sve realne brojeve x i y.

Zadatak T–2

Za dati prirodan broj n kažemo da je polinom P sa realnim koeficijentima n-*lijep* ako jednačina $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$ ima tačno n realnih rješenja. Pokazati da za svaki prirodan broj n

(a) postoji n-lijep polinom;

(b) svaki n-lijep polinom je stepena najmanje $\frac{2n+1}{3}$.

(*Napomena.* Za realan broj x sa $\lfloor x \rfloor$ označavamo najveći cijeli broj koji je manji ili jednak x.)

Zadatak T–3

Neka su n, b i c zadati prirodni brojevi. Družina od n gusara želi pošteno podijeliti svoje blago. Blago se sastoji od $c \cdot n$ identičnih novčića koji su raspoređeni u $b \cdot n$ vreća, od kojih je $n - 1$ vreća na početku prazno. Kapetan Kukić prvo prebroji koliko ima novčića u svakoj vreći i zatim izvodi niz poteza. U jednom potezu može uzeti bilo koji nenegativan broj novčića iz jedne vreće i staviti ih u neku drugu praznu vreću. Dokaži da, bez obzira na početni raspored novčića, Kapetan Kukić može izvesti najviše $n - 1$ poteza i nakon toga podijeliti vreće gusarima tako da svaki gusar dobije b vreća i c novčića.

Zadatak T–4

Dat je prirodan broj n. Dokaži da u pravilnom $6n$-touglu ($6n$-torokutu) možemo povući $3n$ dijagonala sa međusobno različitim krajevima, a zatim ih možemo podijeliti u n međusobno dijsunktnih trojki (tročlanih skupova) tako da

- dijagonale iz svake trojke se sijeku u nekoj unutrašnjoj tački poligona; i
- svih n tako dobijenih presječnih tačaka su različite.

Vrijeme za rad: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Redoslijed zadataka ne zavisi od njihove težine.

Zadatak T–5

Neka je $\overline{AD}$ prečnik opisane kružnice oštrouglog trougla ABC. Prave kroz tačku D paralelne sa pravim AB i AC sijeku prave AC i AB u tačkama E i F, redom. Prave EF i BC sijeku se u tački G. Dokazati da su prave AD i DG međusobno okomite.

Zadatak T–6

Neka je dat trougao ABC i neka je tačka M središte stranice $\overline{BC}$. Tačka X leži na polupravoj AB sa početnom tačkom A i zadovoljava uslov da je $2\sphericalangle CXA = \sphericalangle CMA$. Tačka Y leži na polupravoj AC sa početnom tačkom A i zadovoljava uslov da je $2\sphericalangle AYB = \sphericalangle AMB$. Prava BC siječe opisanu kružnicu trougla AXY u tačkama P i Q, tako da tačke P, B, C i Q leže u tom poretku na pravoj BC. Dokazati da je $\overline{PB} = \overline{QC}$.

Zadatak T–7

Naći sve parove prirodnih brojeva (n, p) takve da je p prost broj i da vrijedi

$$1 + 2 + \cdots + n = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + p^2).$$

Zadatak T–8

Dokazati da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da broj n^2 napisan u bazi 4 sadrži samo cifre 1 i 2.