15th Middle European Mathematical Olympiad Croatia 2021

Soutěž družstev
26. srpna 2021

Czech version

Příklad T–1

Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že nerovnost

$$f(x^2) - f(y^2) \leqslant (f(x) + y)(x - f(y))$$

platí pro všechna reálná čísla x a y.

Příklad T–2

Pro kladné celé číslo n řekneme, že polynom P s reálnými koeficienty je *n-násobně pěkný*, pokud rovnice $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$ má právě n reálných řešení. Dokažte, že pro každé celé kladné číslo n

(a) existuje n-násobně pěkný polynom;

(b) libovolný n-násobně pěkný polynom má stupeň alespoň $\frac{2n+1}{3}$.

Poznámka. Pro reálné číslo x značíme symbolem $\lfloor x \rfloor$ největší celé číslo menší nebo rovné x.

Příklad T–3

Jsou dána kladná celá čísla n, b a c. Skupina n pirátů si chce spravedlivě rozdělit poklad. Ten se skládá z $c \cdot n$ identických mincí rozmístěných do $b \cdot n$ pytlů, z nichž alespoň $n - 1$ je na začátku prázdných. Kapitán Zdeněk si prohlédne obsah každého pytle a dále postupuje v tazích. V jednom tahu může přemístit libovolný počet mincí z jednoho pytle do jednoho z prázdných pytlů. Dokažte, že ať už jsou mince na začátku rozmístěny jakkoliv, Zdeněk může udělat nejvýše $n-1$ tahů, po nichž lze rozdělit pytle mezi piráty tak, že každý pirát dostane b pytlů a c mincí.

Příklad T–4

Ať n je kladné celé číslo. Dokažte, že v pravidelném $6n$-úhelníku lze nakreslit $3n$ úhlopříček s navzájem různými koncovými body a těchto $3n$ úhlopříček dále rozdělit do n trojic tak, že

- úhlopříčky v každé trojici se protínají v jednom bodě ležícím uvnitř daného $6n$-úhelníku, a
- průsečíky určené všemi trojicemi úhlopříček tvoří n navzájem různých bodů.

Čas na vypracování: 5 hodin
Čas na dotazy: 60 minut
Každá úloha je hodnocena nejvýše 8 body.
Úlohy nejsou řazeny dle obtížnosti.

Příklad T–5

Označme AD průměr kružnice opsané ostroúhlému trojúhelníku ABC. Rovnoběžky se stranami AB a AC procházející bodem D protínají přímky AC a AB postupně v bodech E a F. Přímky EF a BC se protínají v bodě G. Dokažte, že přímky AD a DG jsou na sebe kolmé.

Příklad T–6

V trojúhelníku ABC označme M střed strany BC. Bod X leží na polopřímce AB tak, že $2|\sphericalangle CXA| = |\sphericalangle CMA|$. Bod Y leží na polopřímce AC tak, že $2|\sphericalangle AYB| = |\sphericalangle AMB|$. Přímka BC protíná kružnici opsanou trojúhelníku AXY v bodech P a Q takových, že P, B, C a Q leží na přímce BC v tomto pořadí. Dokažte, že $|PB| = |QC|$.

Příklad T–7

Najděte všechny dvojice (n, p) kladných celých čísel takových, že p je prvočíslo a platí rovnost

$$1 + 2 + \cdots + n = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + p^2).$$

Příklad T–8

Ukažte, že existuje nekonečně mnoho kladných celých čísel n takových, že zápis čísla n^2 ve čtyřkové soustavě obsahuje pouze číslice 1 a 2.

Čas na vypracování: 5 hodin
Čas na dotazy: 60 minut
Každá úloha je hodnocena nejvýše 8 body.
Úlohy nejsou řazeny dle obtížnosti.