Aufgabe T–1

Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass die Ungleichung

$$f(x^2) - f(y^2) \leqslant (f(x) + y)(x - f(y))$$

für alle reellen Zahlen x und y erfüllt ist.

Aufgabe T–2

Gegeben sei eine positive ganze Zahl n. Wir nennen ein Polynom P mit reellen Koeffizienten n-*schön*, wenn die Gleichung $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$ genau n reelle Lösungen hat. Man zeige, dass für jede positive ganze Zahl n

(a) ein n-schönes Polynom existiert;

(b) jedes n-schöne Polynom einen Grad von mindestens $\frac{2n+1}{3}$ hat.

(*Anmerkung:* Für eine reelle Zahl x bezeichnen wir mit $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.)

Aufgabe T–3

Seien n, b und c positive ganze Zahlen. Eine Gruppe von n Piraten möchte ihren Schatz fair aufteilen. Der Schatz besteht aus $c \cdot n$ identischen Münzen, die auf $b \cdot n$ Beutel aufgeteilt sind, von denen zunächst mindestens $n - 1$ Beutel leer sind. Kapitän Jack inspiziert den Inhalt jedes Beutels und führt dann eine Reihe von Zügen aus. In einem Zug kann er aus einem einzelnen Beutel eine beliebige Anzahl an Münzen nehmen und diese in einen leeren Beutel geben. Man zeige, dass, egal wie die Münzen anfangs verteilt sind, Jack höchstens $n - 1$ Zügen ausführen und danach die Beutel so auf die Piraten aufteilen kann, dass jeder Pirat genau b Beutel und c Münzen bekommt.

Aufgabe T–4

Sei n eine positive ganze Zahl. Man zeige, dass man in einem regelmäßigen $6n$-Eck derart $3n$ Diagonalen mit paarweise verschiedenen Endpunkten einzeichnen und die gezeichneten Diagonalen in n Tripel aufteilen kann, dass

- die Diagonalen in jedem Tripel einander in einem inneren Punkt des Polygons schneiden und
- alle diese n Schnittpunkte verschieden sind.

Aufgabe T–5

Sei AD der Durchmesser des Umkreises eines spitzwinkligen Dreiecks ABC. Die Geraden durch D parallel zu AB und AC schneiden die Geraden AC bzw. AB in den Punkten E bzw. F. Die Geraden EF und BC schneiden einander im Punkt G.

Man zeige, dass AD und DG senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe T–6

Seien ABC ein Dreieck und M der Mittelpunkt der Strecke BC. Sei X ein Punkt auf der Halbgeraden $[AB$, sodass $2\sphericalangle CXA = \sphericalangle CMA$ gilt. Sei Y ein Punkt auf der Halbgeraden $[AC$, sodass $2\sphericalangle AYB = \sphericalangle AMB$ gilt. Die Gerade BC schneide den Umkreis des Dreiecks AXY so in den Punkten P und Q, dass P, B, C und Q in dieser Reihenfolge auf der Geraden BC liegen. Man zeige, dass $|PB| = |QC|$ ist.

(*Anmerkung:* Mit der Schreibweise $[XY$ bezeichnen wir die Halbgerade (den Strahl), die (der) bei X beginnt und durch Y geht.)

Aufgabe T–7

Man bestimme alle Paare (n, p) positiver ganzer Zahlen, sodass p prim ist und

$$1 + 2 + \cdots + n = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + p^2)$$

gilt.

Aufgabe T–8

Man zeige, dass es unendlich viele positive ganze Zahlen n gibt, sodass n^2 im Zahlensystem zur Basis 4 nur die Ziffern 1 und 2 enthält.

Zeit: 5 Stunden
Zeit für Fragen: 60 Minuten
Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.
Die Reihenfolge der Aufgaben ist unabhängig von ihrer Schwierigkeit.