Zadatak T–1

Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da nejednakost

$$f(x^2) - f(y^2) \leqslant (f(x) + y)(x - f(y))$$

vrijedi za sve realne brojeve x i y.

Zadatak T–2

Za prirodan broj n, kažemo da je polinom P s realnim koeficijentima *n-zgodan* ako jednadžba $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$ ima točno n realnih rješenja. Dokažite da za svaki prirodan broj n

(a) postoji n-zgodan polinom;

(b) svaki n-zgodan polinom ima stupanj barem $\frac{2n+1}{3}$.

(*Napomena.* Za realni broj x, sa $\lfloor x \rfloor$ označavamo najveći cijeli broj koji je manji ili jednak x.)

Zadatak T–3

Neka su n, b i c prirodni brojevi. Skupina od n gusara želi pošteno podijeliti svoje blago. Blago se sastoji od $c \cdot n$ identičnih novčića koji su raspoređeni u $b \cdot n$ vreća, od kojih je barem $n - 1$ vreća na početku prazno. Kapetan Kuka prvo pogleda u kojoj vreći je koliko novčića, i zatim čini niz poteza. U jednom potezu, može uzeti bilo koji broj novčića iz jedne vreće i staviti ih u neku drugu praznu vreću. Dokažite da, bez obzira na početni raspored novčića, Kuka može načiniti najviše $n-1$ poteza i nakon toga podijeliti vreće gusarima na način da svaki gusar dobije b vreća i c novčića.

Zadatak T–4

Neka je n prirodni broj. Dokažite da je u pravilnom $6n$-terokutu moguće nacrtati $3n$ dijagonala s međusobno različitim krajnjim točkama i podijeliti nacrtane dijagonale u n disjunktnih trojki tako da su sljedeća svojstva zadovoljena:

- dijagonale iz svake trojke se sijeku u jednoj točki i ta točka je u unutrašnjosti mnogokuta i
- nikoje dvije od tih n točaka nisu iste.

Vrijeme rješavanja: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Poredak zadataka ne ovisi o njihovoj težini.

Zadatak T–5

Neka je $\overline{AD}$ promjer kružnice opisane šiljastokutnom trokutu ABC. Pravci kroz D paralelni s AB i AC sijeku pravce AC i AB redom u točkama E i F. Pravci EF i BC sijeku se u točki G. Dokažite da su pravci AD i DG međusobno okomiti.

Zadatak T–6

Neka je ABC trokut i neka je M polovište dužine $\overline{BC}$. Neka je X točka na polupravcu AB takva da vrijedi $2\sphericalangle CXA = \sphericalangle CMA$. Neka je Y točka na polupravcu AC takva da vrijedi $2\sphericalangle AYB = \sphericalangle AMB$. Pravac BC siječe kružnicu opisanu trokutu AXY u točkama P i Q, tako da točke P, B, C i Q leže u ovom poretku na pravcu BC. Dokažite da vrijedi $|PB| = |QC|$.

Zadatak T–7

Odredite sve parove prirodnih brojeva (n, p) takve da je p prost i vrijedi

$$1 + 2 + \cdots + n = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + p^2).$$

Zadatak T–8

Dokažite da postoji beskonačno prirodnih brojeva n takvih da broj n^2 zapisan u bazi 4 sadrži samo znamenke 1 i 2.