Užduotis T–1

Nustatykite visas funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurioms nelygybė

$$f(x^2) - f(y^2) \leqslant (f(x) + y)(x - f(y))$$

galioja su visais realiaisiais x ir y.

Užduotis T–2

Kiekvienam natūraliajam skaičiui n daugianarį $P(x)$ su realiaisiais koeficientais vadinsime *n-žaviu*, jei lygtis $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$ turi lygiai n realiųjų sprendinių. Kiekvienam natūraliajam skaičiui n įrodykite:

(a) egzistuoja bent vienas n-žavus daugianaris;

(b) kiekvieno n-žavaus daugianario laipsnis yra ne mažesnis nei $\frac{2n+1}{3}$.

(*Pastaba.* Kiekvienam realiajam skaičiui x užrašas $\lfloor x \rfloor$ žymi didžiausią sveikąjį skaičių, ne didesnį už x.)

Užduotis T–3

Duoti natūralieji skaičiai n, b ir c. Gauja, kurią sudaro n piratų, nori teisingai pasidalinti lobį. Lobį sudaro $c \cdot n$ vienodų monetų, paskirstytos į $b \cdot n$ maišų. Pradžioje yra mažiausiai $n - 1$ tuščias maišas. Kapitonas Džekas patikrina kiekvieno maišo turinį, o tada atlieka ėjimų seką. Kiekvienu ėjimu jis paima bet kokį neneigiamą monetų kiekį iš bet kurio vieno maišo ir perkelia tas monetas į bet kurį tuščią maišą. Įrodykite: nepriklausomai nuo pradinio monetų pasiskirstymo, Džekas visada gali taip atlikti daugiausiai $n - 1$ ėjimą ir po to išdalyti piratams maišus, kad kiekvienas piratas gautų b maišų ir c monetų.

Užduotis T–4

Duotas natūralusis skaičius n. Įrodykite, kad taisyklingajame $6n$-kampyje įmanoma nubrėžti $3n$ įstrižainių, kurių visi galai yra poromis skirtingi, ir suskirstyti šias įstrižaines į n trejetų, tenkinančių šias sąlygas:

- įstrižainės, sudarančios trejetą, visada kertasi viename daugiakampio vidaus taške, ir
- visi šie n sankirtos taškų yra skirtingi.

Darbui skiriamos 5 valandos.
Laikas klausimams: 60 min
Kiekviena užduotis verta 8 taškų.
Užduočių tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.

Užduotis T–5

Nubrėžtas smailiojo trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo skersmuo AD. Tiesė, einanti per tašką D ir lygiagreti su tiese AB, kerta tiesę AC taške E. Tiesė, einanti per tašką D ir lygiagreti su tiese AC, kerta tiesę AB taške F. Tiesės EF ir BC kertasi taške G. Įrodykite, kad tiesės AD ir DG yra statmenos.

Užduotis T–6

Taškas M dalija trikampio ABC kraštinę BC pusiau. Tiesės spindulio AB taškas X tenkina lygybę $2\angle CXA = \angle CMA$. Tiesės spindulio AC taškas Y tenkina lygybę $2\angle AYB = \angle AMB$. Tiesė BC kerta trikampio AXY apibrėžtinį apskritimą taškuose P ir Q. Tiesėje BC keturi taškai eina tokia tvarka: P, B, C, Q. Įrodykite, kad $PB = QC$.

Užduotis T–7

Raskite visas tokias natūraliųjų skaičių poras (n, p), kad skaičius p yra pirminis ir

$$1 + 2 + \cdots + n = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + p^2).$$

Užduotis T–8

Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug natūraliųjų skaičių n, kuriems skaičius n^2 ketvirtainėje skaičiavimo sistemoje turi tik skaitmenis 1 ir 2.

Darbui skiriamos 5 valandos.
Laikas klausimams: 60 min
Kiekviena užduotis verta 8 taškų.
Užduočių tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.