Zadanie T–1

Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że nierówność

$$f(x^2) - f(y^2) \leqslant (f(x) + y)(x - f(y))$$

zachodzi dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y.

Zadanie T–2

Dla dodatniej liczby całkowitej n, wielomian $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych nazywamy *n-podłogowym*, jeżeli równanie $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$ ma dokładnie n rozwiązań w liczbach rzeczywistych. Wykazać że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n

(a) istnieje wielomian n-podłogowy;

(b) każdy wielomian n-podłogowy jest stopnia co najmniej $\frac{2n+1}{3}$.

Uwaga. Dla x będącego liczbą rzeczywistą, $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

Zadanie T–3

Niech n, b i c będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Banda n piratów chce sprawiedliwie podzielić swój skarb. Składa się on z $c \cdot n$ identycznych monet rozmieszczonych w $b \cdot n$ sakwach, z których na początku przynajmniej $n - 1$ jest pustych. Kapitan Janusz sprawdza zawartość każdej z sakw, a następnie wykonuje sekwencję ruchów. W każdym ruchu może on przenieść dowolną liczbę monet z jednej sakwy do dowolnej pustej sakwy. Udowodnić, że niezależnie od tego jak monety są rozmieszczone na początku, Janusz może wykonać nie więcej niż $n - 1$ ruchów, a następnie rozdzielić sakwy z monetami pomiędzy piratów, tak aby każdy z piratów dostał dokładnie b sakw i c monet.

Zadanie T–4

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Udowodnić, że w $6n$-kącie foremnym można narysować $3n$ przekątnych o parami różnych końcach i podzielić je na n grup po trzy, tak że:

- przekątne w każdej grupie przecinają się w jednym punkcie wewnątrz wielokąta oraz
- wszystkie te n punktów przecięcia jest różnych.

Czas: 5 godzin
Czas na zadawanie pytań: 60 minut
Za każde zadanie można otrzymać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.

Zadanie T–5

Niech AD będzie średnicą okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Proste przechodzące przez D równoległe do AB i AC przecinają proste AC i AB odpowiednio w punktach E i F. Proste EF i BC przecinają się w punkcie G. Udowodnić, że proste AD i DG są prostopadłe.

Zadanie T–6

Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC. Punkt X leży na półprostej $AB^{\rightarrow}$ w taki sposób, że $2\angle CXA = \angle CMA$. Punkt Y leży na półprostej $AC^{\rightarrow}$ w taki sposób, że $2\angle AYB = \angle AMB$. Prosta BC przecina okrąg opisany na trójkącie AXY w punktach P i Q, a punkty P, B, C, Q leżą na prostej BC w tej kolejności. Udowodnić, że $PB = QC$.

Zadanie T–7

Znaleźć wszystkie takie pary (n, p) dodatnich liczb całkowitych, że p jest liczbą pierwszą oraz

$$1 + 2 + \cdots + n = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + p^2).$$

Zadanie T–8

Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n takich, że liczba n^2 zapisana jest w systemie czwórkowym wyłącznie przy użyciu cyfr 1 i 2.

Czas: 5 godzin
Czas na zadawanie pytań: 60 minut
Za każde zadanie można otrzymać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.