Úloha T–1

Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že nerovnosť

$$f(x^2) - f(y^2) \leqslant (f(x) + y)(x - f(y))$$

je splnená pre všetky reálne čísla x a y.

Úloha T–2

Pre kladné celé číslo n povieme, že polynóm $P(x)$ s reálnymi koeficientmi je n-*krásny*, ak má rovnica $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$ presne n reálnych riešení. Ukážte, že pre každé kladné celé číslo n

(a) existuje n-krásny polynóm;

(b) každý n-krásny polynóm má stupeň aspoň $\frac{2n+1}{3}$.

(*Poznámka.* Pre reálne číslo x označuje symbol $\lfloor x \rfloor$ najväčšie celé číslo, ktoré je menšie alebo rovné x.)

Úloha T–3

Dané sú kladné celé čísla n, b a c. Skupina n pirátov si chce férovo rozdeliť poklad. Poklad pozostáva z $c \cdot n$ rovnakých mincí rozmiestnených v $b \cdot n$ vreciach, z ktorých je aspoň $n - 1$ na začiatku prázdnych. Kapitán Jack si prezrie obsah jednotlivých vriec a spraví postupnosť ťahov. V každom ťahu môže premiestniť ľubovoľný počet mincí z niektorého vreca do jedného prázdneho vreca. Dokážte, že bez ohľadu na to, ako sú mince na začiatku rozmiestnené, môže Jack spraviť nanajvýš $n - 1$ ťahov tak, že potom môže rozdeliť vrecia medzi pirátov tak, aby každý pirát dostal b vriec a c mincí.

Úloha T–4

Dané je prirodzené číslo n. Dokážte, že v pravidelnom $6n$-uholníku môžeme nakresliť $3n$ uhlopriečok takých, že ich koncové body sú všetky po dvoch rôzne, a rozdeliť nakreslené uhlopriečky do n trojíc tak, že:

- uhlopriečky v každej trojici sa pretínajú v jednom vnútornom bode $6n$-uholníka a
- všetkých týchto n priesečníkov je rôznych.

Čas na riešenie: 5 hodín
Čas na otázky: 60 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 8 bodov.
Poradie úloh nezávisí od ich obtiažnosti.

Úloha T–5

Nech AD je priemer kružnice opísanej ostrouhlému trojuholníku ABC. Rovnobežky so stranami AB a AC prechádzajúce bodom D pretínajú priamky AC a AB postupne v bodoch E a F. Priamky EF a BC sa pretínajú v bode G. Dokážte, že priamky AD a DG sú navzájom kolmé.

Úloha T–6

Nech M je stred strany BC trojuholníka ABC. Bod X je zvolený na polpriamke AB tak, že platí $2|\measuredangle CXA| = |\measuredangle CMA|$. Bod Y je zvolený na polpriamke AC tak, že platí $2|\measuredangle AYB| = |\measuredangle AMB|$. Priamka BC pretína kružnicu opísanú trojuholníku AXY v bodoch P a Q tak, že body P, B, C a Q ležia v tomto poradí na priamke BC. Dokážte, že $|PB| = |QC|$.

Úloha T–7

Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel (n, p) také, že p je prvočíslo a

$$1 + 2 + \cdots + n = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + p^2).$$

Úloha T–8

Dokážte, že existuje nekonečne veľa kladných celých čísel n takých, že n^2 napísané v sústave so základom 4 obsahuje iba cifry 1 a 2.