**Naloga T–1**

Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki za vsa realna števila $x$ in $y$ ustrezajo neenakosti

$$f(x^2) - f(y^2) \le (f(x) + y)(x - f(y)).$$

**Naloga T–2**

Za naravno število $n$ polinom $P$ z realnimi koeficienti imenujemo $n$-*zaokrožen* takrat, ko ima enačba $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$ natanko $n$ realnih rešitev.

(a) Pokaži, da za vsako naravno število $n$ obstaja $n$-zaokrožen polinom.

(b) Pokaži, da ima vsak $n$-zaokrožen polinom stopnjo vsaj $\frac{2n+1}{3}$.

(*Opomba:* Za realno število $x$ označimo z $\lfloor x \rfloor$ največje celo število manjše ali enako $x$.)

**Naloga T–3**

Naj bodo $n$, $b$ in $c$ naravna števila. Skupina $n$ piratov si želi pošteno razdeliti zaklad, ki vsebuje $b \cdot n$ vreč, v katerih je skupaj $c \cdot n$ identičnih zlatnikov. Na začetku je vsaj $n-1$ od vseh vreč praznih. Strašni Gusar Jakob Jurij ve, koliko zlatnikov je v vsaki vreči. Z zaporedjem potez prerazporedi zlatnike med vrečami. V vsaki potezi iz poljubne vreče vzame poljubno število zlatnikov in jih prestavi v eno od praznih vreč. Dokaži, da za vsako začetno razporeditev zlatnikov lahko Strašni Gusar Jakob Jurij z največ $n-1$ potezami prerazporedi zlatnike tako, da vsak pirat dobi $b$ vreč in v njih skupaj $c$ zlatnikov.

**Naloga T–4**

Naj bo $n$ naravno število. Dokaži, da v pravilnem $6n$-kotniku lahko narišemo $3n$ diagonal, med katerimi nobeni dve nimata skupnega oglišča in narisane diagonale lahko razdelimo v $n$ trojic tako, da naenkrat velja, da se

- vse diagonale v vsaki trojici sekajo v eni točki v notranjosti večkotnika in je
- vseh $n$ tako določenih točk paroma različnih.

**Naloga T–5**

Naj bo $AD$ premer krožnice, očrtane ostrokotnemu trikotniku $ABC$. Premici skozi $D$, vzporedni $AB$ in $AC$ sekata premici $AC$ in $AB$ v točkah $E$ in $F$, v tem vrstnem redu. Točka $G$ je presečišče premic $EF$ in $BC$. Dokaži, da sta premici $AD$ in $DG$ pravokotni.

**Naloga T–6**

Naj bo $ABC$ trikotnik in M razpolovišče daljice $BC$. Točka $X$ leži na poltraku $AB$ tako, da velja $2\angle CXA = \angle CMA$. Točka $Y$ leži na poltraku $AC$ tako, da velja $2\angle AYB = \angle AMB$. Premica $BC$ seka krožnico očrtano trikotniku $AXY$ v $P$ in $Q$, pri čemer točke $P$, $B$, $C$ in $Q$ ležijo v tem vrstnem redu na premici $BC$. Dokaži, da velja $PB = QC$.

**Naloga T–7**

Poišči vse pare $(n, p)$ naravnih števil $n$ in praštevil $p$, za katere velja

$$1 + 2 + \cdots + n = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + p^2).$$

**Naloga T–8**

Dokaži, da obstaja neskončno mnogo naravnih stevil $n$ za katera velja, da zapis $n^2$ v bazi 4 vsebuje le števke 1 in 2.