Задатак Т–1

Одредити све функције $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да неједнакост

$$f(x^2) - f(y^2) \leqslant (f(x) + y)(x - f(y))$$

вриједи за све реалне бројеве x и y.

Задатак Т–2

За дати природан број n кажемо да је полином P са реалним коефицијентима n-*лијеп* ако једначина $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$ има тачно n реалних рјешења. Показати да за сваки природан број n

(а) постоји n-лијеп полином;

(б) сваки n-лијеп полином је степена најмање $\frac{2n+1}{3}$.

(*Напомена.* За реалан број x са $\lfloor x \rfloor$ означавамо највећи цијели број који је мањи или једнак x.)

Задатак Т–3

Нека су n, b и c задати природни бројеви. Дружина од n гусара жели поштено подијелити своје благо. Благо се састоји од $c \cdot n$ идентичних новчића који су распоређени у $b \cdot n$ врећа, од којих је $n-1$ врећа на почетку празно. Капетан Кукић прво преброји колико има новчића у свакој врећи и затим изводи низ потеза. У једном потезу може узети било који ненегативан број новчића из једне вреће и ставити их у неку другу празну врећу. Докажи да, без обзира на почетни распоред новчића, Капетан Кукић може извести највише $n-1$ потеза и након тога подијелити вреће гусарима тако да сваки гусар добије b врећа и c новчића.

Задатак Т–4

Дат је природан број n. Докажи да у правилном $6n$-тоуглу ($6n$-торокуту) можемо повући $3n$ дијагонала са међусобно различитим крајевима, а затим их можемо подијелити у n међусобно дијсунктних тројки (трочланих скупова) тако да

- дијагонале из сваке тројке се сијеку у некој унутрашњој тачки полигона; и
- свих n тако добијених пресјечних тачака су различите.

Вријеме за рад: 5 сати
Вријеме за питања: 60 мин
Сваки задатак вриједи 8 бодова.
Редослијед задатака не зависи од њихове тежине.

Задатак Т–5

Нека је $\overline{AD}$ пречник описане кружнице оштроуглог троугла ABC. Праве кроз тачку D паралелне са правим AB и AC сијеку праве AC и AB у тачкама E и F, редом. Праве EF и BC сијеку се у тачки G. Доказати да су праве AD и DG узајамно нормалне.

Задатак Т–6

Нека је дат троугао ABC и нека је тачка M средиште странице $\overline{BC}$. Тачка X лежи на полуправој AB са почетном тачком A и задовољава услов да је $2\sphericalangle CXA = \sphericalangle CMA$. Тачка Y лежи на полуправој AC са почетном тачком A и задовољава услов да је $2\sphericalangle AYB = \sphericalangle AMB$. Права BC сијече описану кружницу троугла AXY у тачкама P и Q, тако да тачке P, B, C и Q леже у том поретку на правој BC. Доказати да је $\overline{PB} = \overline{QC}$.

Задатак Т–7

Наћи све парове природних бројева (n, p) такве да је p прост број и да вриједи

$$1 + 2 + \cdots + n = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + p^2).$$

Задатак Т–8

Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да број n^2 написан у бази 4 садржи само цифре 1 и 2.